$I(\tau)$ integrali

$$I(\tau)=\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt$$

ile tanımlanır, g, $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ aralığının dışında sıfır olduğu için

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

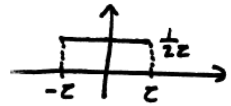
dır. Mekanik sistemlerde $g(t)$ bir kuvvet ve $I(\tau)$, $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ zaman aralığındaki $g(t)$ kuvvetinin toplam darbesidir. (impulsudur). Benzer şekilde eğer y, bir elektrik devresindeki akım ve $g(t)$, voltajın zamana göre türevi ise $I(\tau)$, $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ aralığı boyunca devredeki toplam voltajı temsil eder.

Özel olarak $t_0=0$ alalım ve $g(t)$, τ bir küçük pozitif sabit olmak üzere

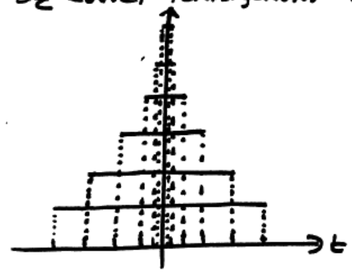
$$g(t)=d_\tau(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\tau}, & -\tau<t<\tau \\ 0, & t\leq -\tau \text{ veya } t\geq \tau \end{cases}$$

verilsin.

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt=\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{2\tau}\,dt=\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau=1$$



$\tau\to 0$ alarak d_τ kuvvet fonksiyonunu ideallestirelim.



$$\lim_{\tau\to 0} d_\tau(t)=0 \quad , t\neq 0 \qquad (6.2)$$

$\tau\neq 0$ durumunda her τ için $I(\tau)=1$ olduğundan

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau)=1 \qquad (6.3)$$

dır. Buna göre (6.2) ve (6.3) denklemleri kullanılarak birim darbe fonksiyonu δ şöyle tanımlanır;

$$\delta(t)=0 \quad , t\neq 0 \qquad (6.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \qquad (6.5)$$

"calculus"te (6.4) ve (6.5) denklemlerini sağlayan bu çeşit bir elemanter fonksiyon yoktur. Bu Dirac-delta fonksiyonuna bir örnektir. $t=t_0$ noktasında δ fonksiyonu

$$\delta(t-t_0)=0 \quad , t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

olarak tanımlanır. Ve Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}$$

ile tanımlanır. Buna göre $t_0>0$ için

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}d_\tau(t-t_0)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}\,dt=-\frac{1}{2\tau s}e^{-st}\Big|_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}$$

$$=\frac{1}{2s\tau}e^{st_0}\left(e^{s\tau}-e^{-s\tau}\right)$$

$$=\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-st_0}$$

ve sonuçta

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$$

bulunur. $t_0\to 0^+$ için

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\lim_{t_0\to 0^+}e^{-st_0}=1$$

dir. Benzer şekilde verilen herhangi sürekli fonksiyon ile delta fonksiyonunun çarpımının integralini tanımlayabiliriz;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}f(t)\,dt \quad \text{(İntegral Hesabın Ortalama Değer Teoremine göre)}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\, f(t^*)=f(t_0)$$

Örnek 1) $y''+2y'+3y=\sin t+\delta(t-3\pi)$ $\quad y(0)=y'(0)=0$ başlangıç değer problemini çözünüz ve çözümün grafiğini çiziniz.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-3\pi)\}=e^{-3\pi s}$$

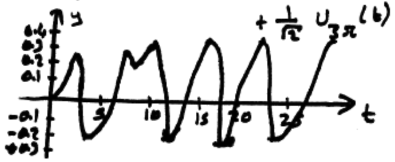
$$\mathcal{L}\{y''+2y'+3y\}=\mathcal{L}\{\sin t+\delta(t-3\pi)\}$$

$$(s^2+2s+3)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+e^{-3\pi s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+3)}+\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+3}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{-s+1}{s^2+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+2}\right]+\frac{e^{-3\pi s}}{(s+1)^2+2}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{4}\left[-\cos t+\sin t+e^{-t}\cos(\sqrt{2}\,t)\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\,u_{3\pi}(t)\,e^{-(t-3\pi)}\sin\sqrt{2}(t-3\pi)$$



2) $y^{IV}-y=\delta(t-1)$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)$ başlangıç değer problemini çözünüz ve çözümün grafiğini çiziniz.

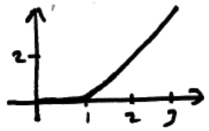
$$\mathcal{L}\{y^{IV}-y\}=\mathcal{L}\{\delta(t-1)\}\Rightarrow (s^4-1)\,Y(s)=e^{-s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)}e^{-s}=\left(\frac{1/4}{s-1}+\frac{-1/4}{s+1}+\frac{-1/2}{s^2+1}\right)e^{-s}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\left(\frac{1}{4}e^{(t-1)}-\frac{1}{4}e^{-(t-1)}-\frac{1}{2}\sin(t-1)\right)u_1(t)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sinh(t-1)-\sin(t-1)\right]u_1(t)$$

$$\left(Y(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1}\right]e^{-s}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}\left[\sinh(t-1)-\sin(t-1)\right]u_1(t)\right)$$



6.6 Konvolüsyon İntegrali

f ve g fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ olmak üzere $H(s)$ Laplace dönüşümünü bu iki dönüşümün çarpımı olarak ifade edebiliriz. Bu durumda $H(s)$'nin $f\cdot g$'nin Laplace dönüşümü olduğu düşünülebilir, fakat bu doğru değildir. Yani Laplace dönüşümü adi çarpımı dönüştürmez (korumaz). Bunun için çarpımı daha "genel çarpım" vermemiz gerekir.

<u>Teorem</u>: $s\geq a\geq 0$ için $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ Laplace dönüşümleri varsa

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (6.6)$$

olmak üzere

$$H(s)=F(s)G(s)=\mathcal{L}\{h(t)\} \qquad s>a$$

dır. h fonksiyonuna f ve g'nin <u>konvolüsyonu</u> denir. (6.6) denklemindeki integrallere <u>konvolüsyon integralleri</u> denir.

Teoremden konvolüsyon integralinin daha "genel çarpım" olduğunu görebiliriz. Ve çarpımı

$$h(t)=(f*g)(t)$$

olarak yazılır. $f*g$ konvolüsyonu, adi çarpımın birçok özelliğine sahiptir. Örneğin

$f*g=g*f$ (değişme özelliği)

$f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$ (dağılma özelliği)

$(f*g)*h=f*(g*h)$ (birleşme özelliği)

$f*0=0*f=0$

Fakat diğer özellikleri adi çarpıma benzemez. Örneğin

$$f*1\neq f$$

dir. Gerçekten

$$(f*1)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot 1\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)d\tau$$

örneğin $f(t)=\cos t$ olursa,

$$(f*1)(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)d\tau=-\sin(t-\tau)\Big|_0^t=\sin t$$

elde edilir. Veya $f*f$'in pozitif olması gerekirken; $f(t)=\sin t$ için

$$(f*f)(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(t-2\tau)-\cos t]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

$t=2\pi$ için $f*f$ negatif çıkar.

<u>Örnek</u> 1) $H(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s}{s^2+4}=F(s)\cdot G(s)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t},\quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\cos 2t$$

$$h(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos(2\tau)d\tau$$ [konvolüsyon terimi şeklinde yazın denseydi bu kadar yeterli olacaktı]

$$h(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos(2\tau)\,d\tau\quad\left[\begin{array}{ll}u=e^{-(t-\tau)} & dv=\cos(2\tau)d\tau\\ du=e^{-(t-\tau)}d\tau & v=\frac{1}{2}\sin 2\tau\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\sin 2\tau\Big|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(2\tau)d\tau\quad\left[\begin{array}{ll}u=// & dv=\sin(2\tau)d\tau\\ du=// & v=-\frac{1}{2}\cos 2\tau\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\cos 2\tau\Big|_0^t+\frac{1}{2}h(t)\right]$$

$$\frac{5}{4}h(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$h(t)=\frac{2}{5}\sin 2t+\frac{1}{5}\cos 2t-\frac{1}{5}e^{-t}$$

2) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t\}\cdot\mathcal{L}\{e^t\}$$

$$=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s^2(s-1)}$$

3) $y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t \qquad y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü konvolüsyon integrali terimi ile yazınız.

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin \alpha t\}$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2\big(s\,Y(s) - y(0)\big) + 2Y(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$(s^2+2s+2)\,Y(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-z)} \sin(t-z)\, \sin(\alpha z)\, dz$$

7 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

7.1 Giriş

n. mertebeden bir dif. denklemi, birinci dereceden lineer dif. denklem sistemi haline getirip çözebiliriz.

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (7.1)$$

n. mertebeden dif. denklemde,

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

olarak tanımlıyalım. Buna göre

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \end{aligned} \qquad (7.2)$$

ve (7.1) denkleminde yerine yazarsak

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (7.3)$$

dir. (7.2) ve (7.3)'ün en genel hali

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad (7.4)$$

dir.

$I: \alpha < t < \beta$ aralığının her noktasında diferansiyellenebilir ve bu aralıktaki her noktada (7.4) denklemini sağlayan n tane

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \dots, \quad x_n = \phi_n(t) \qquad (7.5)$$

fonksiyonların kümesine (7.4) sisteminin bir <u>çözümü</u> denir.

Ayrıca, verilen dif. denklem sisteminin başlangıç koşulları aşağıdaki formda olabilir.

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$$

Burada t_0, t'nin özel bir değeri ve $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ önceden verilen sayılardır. Bu koşullar ile denklem sistemine başlangıç değer problemi denir.

<u>Teorem:</u> $F_1, F_2, \dots, F_n$ ve kısmi türevleri $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$, $R: \alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ bölgesinde sürekli ve $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, R'de olsun. Bu durumda öyle $|t - t_0| < h$ aralığı vardır ki (7.4) dif. denklem sistemi ve (7.5) başlangıç koşullarını sağlayan tek $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ çözümü vardır.

(7.4) denklemindeki $F_1, F_2, \dots, F_n$ fonksiyonlarının herbiri $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımlı değişkenlerinin lineer fonksiyonu ise sisteme <u>lineer</u> aksi durumda <u>lineer olmayan</u> denir.

Birinci mertebeden lineer denklem sistemlerinin genel formu

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \qquad (7.6)$$

şeklindedir. I aralığındaki her t için $g_1(t), \dots, g_n(t)$ fonksiyonları sıfır ise sisteme <u>homojen</u> diğer durumda <u>homojen olmayan</u> denir.

<u>Teorem:</u> $I: \alpha < t < \beta$ açık aralığında $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}, g_1, g_2, \dots, g_n$ fonksiyonları sürekli ise $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ herhangi verilen sayılar olmak üzere (7.5) başlangıç koşullarını sağlayan (7.6) denkleminin tek çözümü $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ vardır. Bu çözüm I aralığı boyunca geçerlidir.

Bu bölümde lineer denklem sistemleri ile çalışılacaktır.

<u>Örnek</u> 1) a) $y'' + 0.5y' + 2y = 0$
b) $y^{IV} - y = 0$

dif. denklemlerini 1. mertebeden dif. denklem sistemine dönüştürünüz.

a) $x_1 = y$, $x_2 = y'$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -0.5x_2 - 2x_1$$

b)

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = x_4$$
$$x_4' = x_1$$

2) $x_1' = 3x_1 - 2x_2$ $\quad x_1(0)=3 \,,\; x_2(0)=\frac{1}{2}$
$x_2' = 2x_1 - 2x_2$

Verilen sistemi ikinci mertebeden tek dif. denklem haline getiriniz. Verilen başlangıç koşullarını sağlayan x_1 ve x_2'yi bulunuz.

Birinci denklemde x_2'yi yalnız bırakırsak

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1'$$

ikinci denklemde (türevi alınarak) yerine yazılırsa

$$\left(\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1'\right)' = 2x_1 - 2\left(\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1'\right)$$

$$\frac{3}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_1'' = -x_1 + x_1'$$

ve buradan

$$x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0$$

elde edilir. Karakteristik denklem $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r+1)(r-2)=0$ ve kökler $r_1=-1$, $r_2=2$ dir. Genel çözüm

$$x_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

dir.

$$x_2 = \frac{3}{2}\left(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}\right) - \frac{1}{2}\left(-c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}\right)$$

$$= 2c_1 e^{-t} + \frac{1}{2}c_2 e^{2t}$$

$x_1(0)=3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3$
$x_2(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3}\,,\; c_2 = \frac{11}{3}$

$$x_1 = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{2t}$$

$$x_2 = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{11}{6}e^{2t}$$

bulunur.